Termodinâmica - 2/2013

LISTA 3

1. Considere um sólido de Einstein com N osciladores e q unidades de energia. Liste todos os microestados e confira sua quantidade com a fórmula combinatorial para os seguintes valores:
(a) $N = 3$ e $q = 5$.
(b) $N = 4$ e $q = 3$.

2. Considere um sistema formado por dois sólidos de Einstein, A e B, cada um com 10 osciladores e partilhando entre os dois 10 unidades de energia. Suponha que o acoplamento entre os dois seja fraco e que a energia total seja fixa.
(a) Quantos macroestados diferentes estão disponíveis para o sistema?
(b) Quantos microestados diferentes estão disponíveis para o sistema?
(c) Supondo que o sistema esteja em equilíbrio térmico, qual a probabilidade de encontrar toda a energia no sólido A?
(d) Qual a probabilidade de encontrar exatamente a metade da energia total no sólido A?
(e) Em que circunstâncias este sistema exibiria comportamento irreversível?

3. Use um computador para construir uma tabela e um gráfico das multiplicidades para dois paramagnetos de dois estados interagentes, cada um contendo 100 dipolos magnéticos elementares. Tome uma "unidade" de energia como a energia necessária para inverter um único dipolo do estado "para cima" (paralelo ao campo externo) para o estado "para baixo" (antiparalelo). Suponha que a quantidade total de unidades de energia, relativa ao estado em que todos os dipolos apontam para cima, seja 80; esta energia pode ser partilhada entre os dois paramagnetos de todas as maneiras. Qual o macroestado mais provável e qual a sua probabilidade de ocorrência? Qual o macroestado menos provável e qual sua probabilidade?

4. Jogue cara ou coroa com 1000 moedas.
(a) Qual a probabilidade de se obter *exatamente* 500 caras e 500 coroas? (Dica: Escreva primeiro uma expressão para o número total de resultados possíveis. Em seguida, use a aproximação de Stirling para determinar a multiplicidade do estado $500 - 500$.)
(b) Qual a probabilidade de se obter exatamente 600 caras e 400 coroas?

5. Determine uma fórmula para a multiplicidade de um sólido de Einstein no limite de "baixas temperaturas", $q << N$, de forma similar ao feito em classe para o limite de altas temperaturas.

6. Mostre que durante uma expansão isotérmica quase estática de um gás ideal monoatômico, a variação de entropia está relacionada com o calor recebido pelo gás através da fórmula simples

$$\Delta S = \frac{Q}{T}.$$

Veremos mais tarde que esta fórmula é válida para *qualquer* processo quase estático. Mostre, no entanto, que ela *não* é válida para a processo de expansão livre discutido em aula.

7. Quer seja para um gás ideal monoatômico, quer para um sólido de Einstein no limite de altas temperaturas, a entropia é dada por Nk multiplicado por um logaritmo. Este logaritmo nunca é muito grande, portanto, se tudo o que você quer é uma estimativa de ordem de grandeza, você pode desprezá-lo e considerar apenas $S \approx Nk$. Isto é, a entropia, em unidades fundamentais, é da ordem de grandeza do número de partículas no sistema. Esta conclusão é de fato verdadeira para a maioria dos sistemas (com algumas exceções importantes a baixas temperaturas, quando as partículas se comportam de forma mais ordenada). Então, só por diversão, faça uma estimativa grosseira da entropia dos seguintes sistemas: um livro de física (cerca de um kilograma de compostos de carbono); um boi (600 kg de água); o Sol (2×10^{30} kg de íons de hidrogênio).

8. Calcule a entropia de mistura para um sistema de dois gases ideais monoatômicos, A e B, cuja proporção de ocorrência relativa seja arbitrária. Seja N o número *total* de moléculas e x a fração destas que são da espécie B. Você deve encontrar

$$\Delta S_{mistura} = -Nk\,[x\,lnx + (1-x)\,ln(1-x)].$$

Verifique que esta expressão se reduz à que foi exposta em sala de aula quando $x = 1/2$.

9. A fórmula para a entropia de mistura obtida noroblema anterior na verdade se aplica a qualquer gás ideal, como tamém a alguns gases densos, líquidos e sólidos. Para sistemas densos, temos que supor que os dois tipos de moléculas têm o mesmo tamanho e que moléculas de tipos diferentes interajam entre si da mesma maneira que duas moléculas de mesmo tipo (mesmas forças, etcp. Este tipo de sistema é chamado de uma **mistura ideal**. Explique porque, numa mistura ideal, a entropia de mistura é dada por

$$\Delta S_{mistura} = k\,ln\binom{N}{N_A},$$

onde N é o número total de moléculas e N_A o número de moléculas do tipo A. Use a aproximação de Stirling para mostrar que esta expressão dá o mesmo resultado que o problema anterior quando N e N_A são ambos muito grandes.

10. Um **buraco negro** é uma região do espaço onde a gravidade é tão intensa que nada, nem mesmo a luz, pode escapar. Jogar algo em um buraco negro é, portanto, um processo irreversível, pelo menos no sentido cotidiano da palavra. De fato, ele é irreversível também no sentido termodinâmico da palavra: adicionar massa a um buraco negro aumenta sua entropia. Ocorre que não há meio de dizer, pelo menos para quem está do lado de fora, que tipo de matéria foi usada para criar um buraco negro. Portanto, a entropia de um buraco negro deve ser maior que a entropia de qualquer tipo de matéria concebível que teria sido usada em sua formação. Sabendo disso, não é difícil estimar a entropia de um buraco negro.

(a) Use análise dimensional para mostrar que um buraco negro de massa M deve ter um raio da ordem de GM/c^2, onde G é a constante universal da gravitação e c é a velocidade da luz. Calcule o raio aproximado de um buraco negro de massa igual à massa solar ($M = 2 \times 10^{30}$ kg).

(b) No espírito do problema 7 desta lista, explique porque a entropia de um buraco negro deve ser, em unidades fundamentais, da ordem do número máximo de partículas que poderia ter sido usado para criá-lo.

(c) Para criar um buraco negro com o maior número possível de partículas, deveríamos usar partículas com a menor energia possível: fótons de grande comprimento de onda (ou outra partícula também sem massa, cuja energia só depende de seu comprimento de onda $E = hc/\lambda$). Mas o comprimento de onda não pode ser maior que o tamanho do buraco negro. Portanto, considere que a energia total dos fótons seja Mc^2 e estime o número máximo de fótons que poderia ter sido usado para criar um buraco negro de massa M. A menos de um fator $8\pi^2$, seu resultado deve concordar com a fórmula exata para a entropia de um buraco negro, obtida em 1973 por Stephen

Hawking através de um cálculo muito mais difícil:

$$S_{bn} = \frac{8\pi^2 G M^2}{hc}\, k.$$

(d) Calcule a entropia de um buraco negro de massa igual a de nosso Sol, e comente o resultado.